PENGANTAR KALKULUS

Disampaikan pada Diklat Instruktur/Pengembang Matematika SMA
Jenjang Dasar
Tanggal 6 s.d. 19 Agustus 2004
di PPPG Matematika

Oleh:
Drs. SETIAWAN, M. Pd.
Widyaiswara PPPG Matematika Yogyakarta

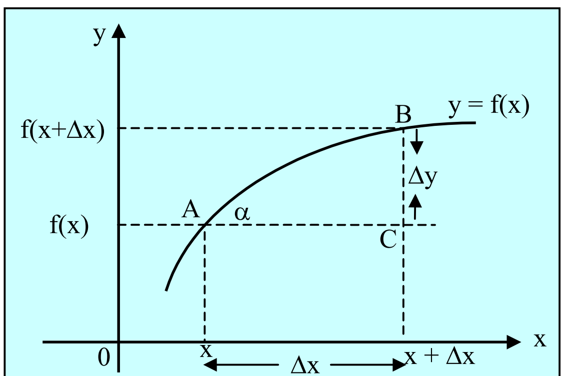
DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
DIREKTORAT JENDERAL PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH
PUSAT PENGEMBANGAN PENATARAN GURU (PPPG) MATEMATIKA
YOGYAKARTA
2004

BAGIAN III
TURUNAN SUATU FUNGSI

A. Turunan Fungsi Aljabar

Sesuatu yang bersifat tetap di dunia ini adalah perubahan itu sendiri, banyak kejadian-kejadian yang melibatkan perubahan. Misalnya gerak suatu obyek (kendaraan berjalan, roket bergerak, laju pengisian air suatu tangki), pertumbuhan bibit suatu tanaman, pertumbuhan ekonomi, inflasi mata uang, berkembangbiaknya bakteri, peluruhan muatan radioaktif dan sebagainya.

Studi tentang garis singgung dan penentuan kecepatan benda bergerak yang dirintis oleh Archimedes (287 – 212 SM), Kepler (1571 – 1630), Galileo (1564 – 1642), Newton (1642 – 1727) dan Leibniz (1646 – 1716) dapat dipandang sebagai peletak dasar dari kalkulus diferensial ini. Namun para ahli berpendapat bahwa Newton dan Leibniz-lah dua orang yang paling banyak andilnya pada pertumbuhan kalkulus. Konsep dasar dari turunan suatu fungsi adalah laju perubahan nilai fungsi.



Gb.2.1

Perhatikan fungsi $y = f(x)$ pada domain $(x, x + \Delta x)$ nilai fungsi berubah dari $f(x)$ pada x sampai dengan $f(x + \Delta x)$ pada $x + \Delta x$.

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$y \qquad = f(x) \qquad -$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Δy : disebut diferensi antara $f(x + \Delta x)$ dengan $f(x)$

Δx : disebut diferensi x

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ disebut hasil basi diferensi.

Jika B bergerak sepanjang kurva $y = f(x)$ mendekati A, maka diperoleh limit :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Nilai limit ini disebut derivatif f (turunan, laju perubahan nilai fungsi, hasil bagi diferensial) dari $y = f(x)$, dan biasa ditulis dengan notasi $\frac{dy}{dx}$ atau y'. (Notasi $\frac{dy}{dx}$ dan dibaca "dy dx" inilah yang kita kenal dengan istilah notasi Leibniz)

Jadi : $\frac{dy}{dx} = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Secara geometris, kita lihat bahwa perbandingan diferensi $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ adalah gradien tali busur AB = tan α. Jika $\Delta x \to 0$ maka tali busur AB akan menjadi garis singgung di A sehingga :

$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ adalah gradien garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di $(x, f(x))$.

Contoh 1

Diketahui kurva dengan persamaan $y = x^2 + 2x$.

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dan persamaan garis singgung kurva di $x = 1$.

Jawab :

$$y = x^2 + 2x$$
$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x)$$
$$= x^2 + 2x.\Delta x + (\Delta x)^2 + 2x + 2\Delta x$$
$$\Delta y = (2x + 2)\ \Delta x + \Delta x^2$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2x+2)\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{(2x+2) + \Delta x^2}{\Delta x}$$
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x+2)\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} ((2x+2) + \Delta x)$$
$$= 2x + 2$$

Untuk $x = 1 \to$ gradien garis singgung $m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = 2.1 + 2 = 4$

$x = 1 \to y = 1^2 + 2.1 = 3 \to$ titik singgung (1, 3).

Sehingga persamaan garis singgungnya :

$$y - 3 = 4(x - 1)$$
$$y = 4x - 1$$

Contoh 2

Tentukan fungsi turunan dari $f(x) = \frac{3}{x^2}$

Jawab :

$$y = \frac{3}{x^2}$$
$$y + \Delta y = \frac{3}{(x+\Delta x)^2}$$
$$\Delta y = \frac{3}{(x+\Delta x)^2} - \frac{3}{x^2} = \frac{3.x^2 - 3(x+\Delta x)^2}{(x+\Delta x)^2.x^2}$$
$$= \frac{-6x.\Delta x - 3\Delta x^2}{(x+\Delta x)^2.x^2} = \frac{\Delta x(-6x - 3\Delta x)}{(x+\Delta x)^2 x^2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-6x - 3\Delta x}{(x+\Delta x)^2 . x^2}$$

Sehingga $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-6x - 3\Delta x}{(x+\Delta x)^2 . x^2}$

$$= \frac{-6x}{x^2 x^2} = \frac{-6}{x^3}$$

Rumus-rumus turunan (derivatif) fungsi y = f(x).

1) Fungsi konstanta y = f(x) = c

   $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$

   $$\boxed{f(x) = c \;\rightarrow\; f'(x) = 0}$$

2) Derivatif $f(x) = x^n$

   $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$

   $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}.\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} (\Delta x)^2 + ... + (\Delta x)^n) - x^n}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} .\Delta x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^{n-3} .\Delta x^2 + ... + (\Delta x)^{n-1} \right)$$

$= nx^{n-1}$.

   $$\boxed{f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}}$$

3) Jika c suatu konstanta dan y = c f(x), maka

   $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x}$

   $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

   $= c.f'(x) = c.\frac{dy}{dx}$

   Contoh 2 : $y = 4x^5 \Rightarrow y' = 4.\frac{dy}{dx}(x^5) = y.5x^4 = 20x^4$.

4) Jika u = f(x) dan v = g(x), maka turunan fungsi y = f(x) ± g(x) dapat dicari sebagai berikut :

   $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - (f(x) + g(x))}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right.$$

$= f'(x) + g'(x).$

Dengan jalan yang sama dapat ditunjukkan bahwa

$y = f(x) - g(x) \to y' = f'(x) - g'(x)$

Jadi :

$$\boxed{y = f(x) \pm g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \pm g'(x)}$$

5) Jika u = f(x) dan v = g(x) dan y = u.v maka

$y = u.v = f(x) \,.\, g(x)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x).g(x+\Delta x) - f(x).g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x).g(x+\Delta x) - f(x).g(x+\Delta x) + f(x).g(x+\Delta x) - f(x).g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\left(\frac{f(x+\Delta x - f(x)}{\Delta x}\right).g(x+\Delta x) + f(x)\left(\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right.\right.$$

$= f'(x).g(x) + f(x) \,.\, g'(x)$

$= u'v + uv'$

Jadi $\quad y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$

6) Jika u = f(x) dan v = g(x), sedemikian hingga $g(x) \neq 0$ pada intervalnya dan y = $\frac{u}{v} = \frac{f(x)}{g(x)}$, maka

$$y' = \lim_{\Delta x \to x} \frac{\left(\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to x} \frac{f(x+\Delta x).g(x) - f(x).g(x+\Delta x)}{\Delta x.g(x+\Delta x).g(x)}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to x} \frac{f(x+\Delta x).g(x) - f(x).g(x) - f(x).g(x+\Delta x) + f(x).g(x)}{\Delta x.g(x+\Delta x).g(x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to x} \frac{\left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right).g(x) - f(x)\left(\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right.}{g(x+\Delta x).g(x)}$$

$$= \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x)^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Jadi $\quad y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Contoh 3

Tentukan f′(x) untuk f(x) = $\frac{2x+3}{x^2}$

Jawab : $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2}$ maka mengingat $(\dfrac{u}{v})' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ diperoleh

$$f(x) = \frac{2.x^2 - (2x+3).2x}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x^2 - 6x}{x^4}$$

$$= \frac{-2x^2 - 6x}{x^4}$$

B. Turunan Fungsi Trigonometri

a. $y = \sin x \Rightarrow y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\dfrac{x+\Delta x - x}{2}\cos\dfrac{x+\Delta x + x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\right).\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$= 1.\cos(x + 0) = \cos x$

Analog $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$.

b. $y = \tan x \Rightarrow y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ dengan mengingat $(\dfrac{u}{v})' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$$\Rightarrow y' = \frac{\cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Analog $y = \tan x \Rightarrow y' = \sec^2 x$

c. $y = \sec x \Rightarrow y = \dfrac{1}{\cos x}$

$$y' = \frac{0.\cos x - 1.(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos x}$$

$= \tan x . \sec x$

Analog $y = \text{cosec } x \Rightarrow y' = -\cot x \text{ cosec } x$.

Jadi :

$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$	$y = \cot x \Rightarrow y' = -\text{cosec}^2 x$
$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$	$y = \sec x \Rightarrow y' = \sec x \tan x$
$y = \tan x \Rightarrow y' = \sec^2 x$	$y = \text{cosec } x \Rightarrow y' = \text{cosec } x \cot x.$

C. Turunan Fungsi Tersusun (Fungsi Komposisi)

Misalkan y = f(x) dimana u = g(x), menentukan fungsi tersusun y = (f∘g)(x) = f(g(x)) dan apabila g mempunyai turunan di x, dan f mempunyai turunan di u = g(x) maka turunan fungsi komposisi (f∘g)(x) ditentukan dengan rumus :

$$\mathbf{(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x)}$$

atau dengan notasi Leibniz :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Rumus ini dikenal dengan nama **aturan rantai** .
Cara yang mudah untuk mengingat aturan rantai adalah :

Variabel kiri | Variabel antara | Variabel kanan

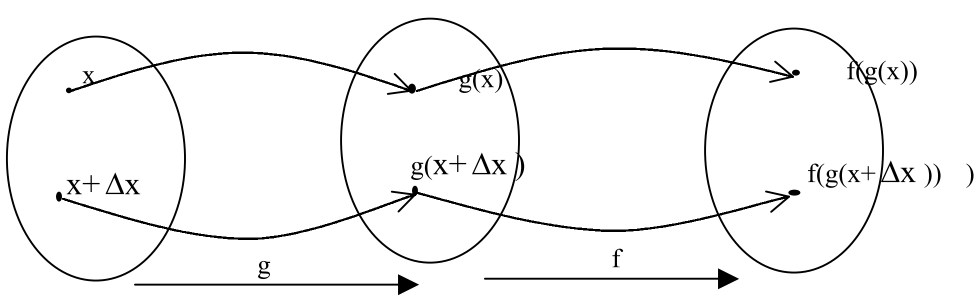
$$y = f(u) \quad \text{dan} \quad u = g(x)$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Turunan variabel kiri terhadap variabel kanan	=	Turunan variabel kiri terhadap variabel antara	•	Turunan variabel antara terhadap variabel kanan

Aturan rantai tersebut dapat dibuktikan sebagai berikut :
Bukti :

Misalkan y = f(u) dan u = g(x); g mempunyai turunan di x dan f mempunyai turunan di u = g(x). Apabila variabel x bertambah dengan Δx yang berubah menjadi (x + Δx), maka u = g(x) bertambah menjadi g(x + Δx) dan y = f(g(x)) bertambah menjadi f(g(x + Δx)), sebagaimana diagram di bawah ini :



Pertambahan untuk u = g(x) adalah $g(x+\Delta x) = g(x) + \Delta g(x)$, dan dari hubungan ini akan diperoleh $\Delta g(x) \to 0$ apabila $\Delta x \to 0$

$$\Rightarrow \Delta f(g(x)) = f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))$$

Berdasar definisi umum turunan fungsi, maka turunan dari fungsi komposisi :

$$(fog)'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f\,og)(x+\Delta x) - (f\,og)(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x) - f(g(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x) - \Delta g(x)) - f(g(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x) + \Delta g(x)) - f(g(x))}{\Delta g(x)} \bullet \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta g(x) \to 0} \frac{f(g(x) - \Delta g(x))}{\Delta g(x)} \bullet \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= f'(g(x)).g'(x) \qquad \text{(terbukti)}$$

Dan apabila aturan rantai di atas kita tulis dengan notasi Leibniz akan diperoleh :

Jika y = f(x) dan u = g(x) maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Contoh 3

Tentukan turunan fungsi $f(x) = (2x^3 - 4)^7$

Jawab :

Misal, $u = 2x^3 - 4 \Rightarrow u' = 6x^2$

$f(x) = u^7 \Rightarrow f'(x) = 7u^6 \,.\, u'$

Jadi $f(x) = (2x^3 - 4)^7 \Rightarrow f'(x) = 7(2x^3 - 4)^6 \,.\, 6x^2$.

$= 42x^2(2x^2 - 4)^6$.

Dalil Rantai di atas dapat dikembangkan lebih lanjut.

Jika y = f(u), u = g(v) dan v = h(x), maka

$(fog)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{d}{dv} . \frac{dv}{dx}}$$

Begitu dan seterusnya.

Contoh 4

Jika f(x) = $\sin^3(2x - 5)$, maka tentukan f′(x).

Jawab :

Misal u = sin(2x – 5) dan v = 2x – 5, sehingga

$$v = 2x - 5 \rightarrow \frac{dv}{dx} = 2$$

$$u = \sin v \rightarrow \frac{du}{dv} = \cos v$$

$$y = u^3 \rightarrow \frac{dy}{du} = 3u^2$$

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{df(x)}{du}.\frac{du}{dv}.\frac{dv}{dx}$$

$$= 3 \,.\, u^2 \,.\, \cos v \,.\, 2$$

$$= 6 \sin^2(2x - 5) \,.\, \cos(2x - 5)$$

D. Turunan Fungsi Logaritma

a. Pandanglah fungsi f(x) = ln x

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\ln(x + \Delta x)}{\Delta x}}{x.\frac{\Delta x}{x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}.1 = \frac{1}{x}$$

Jadi $\boxed{f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}}$

b. Jka f(x) = $^a\log x$, maka

$$f(x) = \frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

Jadi $\boxed{f(x) = {}^a\log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln a}}$

E. Turunan Fungsi Eksponensial

a. Jika f(x) = $e^{g(x)}$, maka

$\ln f(x) = \ln e^{g(x)} = g(x) \,.\, \ln e$

ln f(x) = g(x) jika kedua ruas diturunkan

$\frac{1}{f(x)}.f'(x) = g'(x)$, sehingga $f'(x) = f(x) \,.\, g'(x) = e^{g(x)} \,.\, g'(x)$

Jadi $\boxed{f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{g(x)} \,.\, g'(x)}$

Contoh 5
Jika $y = e^x$, maka $y' = e^x \cdot 1 = e^x$
Sehingga $y = e^x \Rightarrow y' = e^x$

b. Untuk fungsi eksponensial $y = a^{g(x)}$, maka
$\ln y = \ln a^{g(x)}$
$\ln y = g(x) \cdot \ln a$ jika kedua ruas diturunkan, maka

$$\frac{1}{y}.y' = g'(x) \cdot \ln a \Rightarrow y' = y \cdot g'(x) \cdot \ln a$$
$$= a^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \ln a$$

Jadi $y = a^{g(x)} \Rightarrow y' = a^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \ln a$

Contoh 6

Jika $y = 2^{2x^3-3}$, maka $y' = 2^{2x^3-3}.6x.\ln 2$

$$= 6x \cdot 2^{2x^3-3}.\ln 2$$

F. Turunan Fungsi Implisit

Jika $y = f(x)$, maka turunan fungsi implisit $F(x,y) = c$ adalah dengan memandang y fungsi dari x.

Contoh 7
Tentukan y' jika $x^2 + 3xy + y^2 = 4$
Jawab :

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 3xy + y^2) = \frac{d}{dx}(4)$$
$$2x + 3y + 3xy' + 2y \cdot y' = 0$$
$$(3x + 2y)y' = -2x - 3y$$
$$y' = -\frac{3x+3y}{3x+2y}.$$

G. Turunan Jenis Lebih Tinggi

Andaikan fungsi turunan pertama $f'(x)$ atau $\frac{df(x)}{dx}$ dari suatu fungsi adalah suatu fungsi yang dapat didiferensialkan pada x, maka turunan dari turunan pertama ini, disebut turunan kedua, dan ditulis dengan notasi $f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$.

Demikian juga andaikan turunan kedua ini fungsi yang dapat didiferensialkan, maka turunan dari turunan kedua ini disebut turunan ketiga dan ditulis dengan notasi $f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}$.

Begitu dan seterusnya turunan dari turunan ke n-1 disebut turunan ke-n dan ditulis dengan notasi $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$.

Contoh 8

Tentukan $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$ jika $f(x) = x^5 - 5x^2$

Jawab :

$$f(x) = x^5 - 5x^2 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 10x$$
$$f''(x) = 20x^3 - 10$$
$$f'''(x) = 60x^2$$

Contoh 9

Tentukan $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ jika $f(x) = \sin x$

Jawab :

$$f(x) = \sin x \rightarrow \frac{df(x)}{dx} = \cos x = \sin(x + 1 . \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = -\sin x = \sin(x + 2 . \frac{\pi}{2})$$
$$\frac{d^3 f(x)}{dx^3} = -\cos x = \sin(x + 3 . \frac{\pi}{2})$$
$$\frac{d^\sigma f(x)}{dx^\sigma} = \sin x = \sin(x + \sigma . \frac{\pi}{2})$$

………..

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \sin(x + n . \frac{\pi}{2}).$$

Latihan 3

Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 10, tentukan f′(x) dari

1. $f(x) = 6 - 4x^3 + x^5$
2. $f(x) = (3x - 2)^2$

8. $f(x) = (x^2 + \frac{2}{x^2})^2$
9. $f(x) = (2x + \frac{1}{x})(2x - \frac{1}{x})$

3. $f(x) = (x^3 - 2x)^2$ 10. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x\sqrt{x}}$

4. $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ 11. $f(x) = \sqrt[5]{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

5. $f(x) = 3x^2 - \dfrac{1}{6x^3}$ 12. $f(x) = \sqrt{x}\,(3x + \dfrac{1}{3x})(3x - \dfrac{1}{3x})$

6. $f(x) = (3x^2 + 6)(2x - \frac{1}{4})$ 13. $f(x) = (5x^2 - 1)(x^2 + 4x - 2)$.

7. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{3x}$ 14. $f(x) = \dfrac{4x^2+3}{x^3+2x^2}$

16. Diketahui $f(x) = x^2 - 6x - 16$. Tentukan gradien garis singgung kurva di $x = 1$, dan persamaan garis singgungnya.
17. Diketahui fungsi $f : x \rightarrow (2x + 3)^2$
    a) Tentukan rumus untuk turunan fungsi $f'(x)$
    b) Tentukan laju perubahan fungsi pada $x = -1$ dan pada $x = -2$.
18. Jarak s meter yang ditempuh oleh bola golf yang menggelinding pada waktu t detik dinyatakan dengan $s = 15t - t^2$.
    a) Hitung kecepatan bola golf pada t = s
    b) Kapan bola golf tersebut berhenti.
19. Tentukan persamaan garis singgung kurva dengan persamaan $y = (x - 2)^2$ di titik yang absisnya $x = 2$.
20. Tentukan $f'(x)$ dari fungsi-fungsi di bawah ini
    a. $f(x)\ 6 \sin x + 3 \cos x$ h. $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$
    b. $f(x) = 3 \sin x \cos x$ i. $F(x) = \sin^3(x - 5)$
    c. $fx) = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$ j. $f(x) = \sin x^0$
    d. $f(x) = \dfrac{\text{tg } x}{\sin x - \cos x}$ (x^0 = … radian dengan menggunakan kesamaan
    e. $f(x) = x^2 \sec x$ $180^o = \pi$ radian), $\rightarrow x^o$ = … radian
    f. $f(x) = \dfrac{x^2}{\cos x}$ k. $f(x) = \tan(3 - \sin x)$.
21. Jika $y = f(x)$, maka tunjukkan bahwa $\Delta y = f'(x).\Delta x + \varepsilon.\Delta x$, di mana jika $\Delta x \rightarrow 0$ maka $\varepsilon \rightarrow 0$

    Catatan :

    Sifat ini dapat digunakan untuk membuktikan aturan rantai :

    Jika $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ maka $\Delta y = f'(x).\Delta x + \varepsilon.\Delta x$, di mana $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon = 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{du}.\frac{\Delta u}{\Delta x} + \varepsilon.\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{du}.\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon.\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

22. Tentukan f′(x) jika f(x) = $x^7 \sin(2x - 5))$

23. Tentukan g′(x) jika g(x) = $\sqrt{2x + 5x^2}$

22. Jika y = sin x maka $\frac{d^2y}{dx^2} + y = ...$

23. Jika y = x^5 sin 3x, maka tentukan $\frac{d^2y}{dx^2}$

24. Tentukan $\frac{d^ny}{dx^n}$ jika y = e^{kx}

25. Tentukan $\frac{d^2y}{dx^2}$ jika $x^2 - y = 0$

26. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika diketahui $x^3 + y^3 = x^3y^3$.

27. Jika xy + sun y = x^2, maka tentukanlah y′.

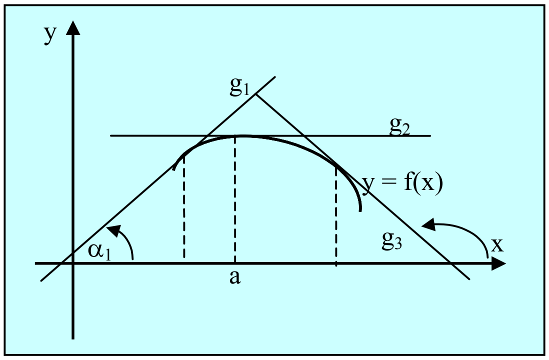
28. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika diketahui :

   a. $x^2y + 3xy^3 - x = 3$
   b. $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 1$
   c. $xy = 8$
   d. $3x^2 - 2xy + y^2 = 0$
   e. $3x^2 - 6y^2 = 4$

29. Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut :

   a. $y = 3e^{-4x}$
   b. $y = (x - 2)e^{5x}$
   c. $y = x \ln 3x$
   d. $y = \log (2x + 3)$
   e. $y = 3^{\sin x + 3x^2}$

H. Fungsi Naik dan Fungsi Turun



Misalkan kurva disamping menyajikan grafik fungsi y = f(x), sehingga terlihat bahwa untuk x < a, diperoleh f′(x) > 0, dikatakan f naik pada interval itu, karena gradien garis-garis singgung selalu positip di interval tersebut. Untuk x > 0, gradien garis singgung-garis singgung selalu negatif sehingga f′(x) < 0 dikatakan f turunan pada interval tersebut.

Gb.2.3

Sedang untuk x = a, gradien garis singgung dititik tersebut = 0, garis singgungnya sejajar sumbu x, sehingga f′(x) = 0, dalam hal ini f tidak naik dan tidak turun dan dikatakan f stasioner di x = a.

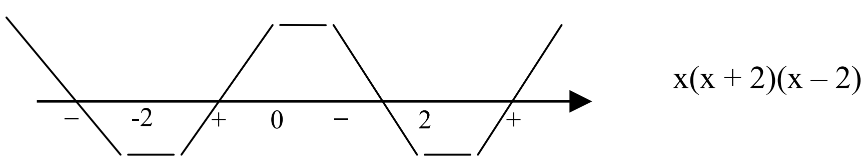
Sehingga kurva y = f(x) akan :
(i) naik jika f′(x) > 0
(ii) turun jika f′(x) < 0
(iii) stasioner jika f′(x) = 0.

Contoh

Tentukan internal dimana fungsi f(x) = $\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 7$ naik atau turun.

Jawab :

f(x) = $\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 7 \rightarrow$ f′(x) = $x^3 - 4x = x(x+2)(x-2)$

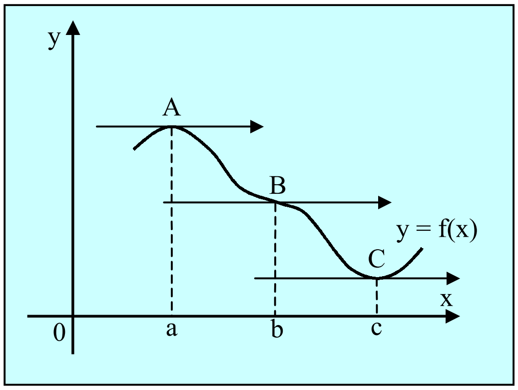


Gb.2.4

Melihat nilai positip dan negatifnya amsing-masing interval, dapat disimpulkan bahwa pada fungsi f(x) = $\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 7$ kurvanya
naik pada interval –2 < x < 0 atau x > 2
turun pada interval x < -2 atau 0 < x < 2.

I. Nilai Stasioner Fungsi

Misal grafik fungsi $y = f(x)$ seperti tersaji dalam diagram berikut :



Gb.2.5

Pada ketiga titik A, B dan C diperoleh $f'(a) = f'(b) = f'(c) = 0$ ketiga garis singgungnya sejajar sumbu x, dan f stasioner pada ketiga titik tersebut. Untuk titik A, $f'(x)$ berubah tanda dari positip – nol – negatif, dikatakan f mempunyai – nilai balik maksimum $f(a)$ pada $x = 0$.

Untuk titik B, $f'(x)$ berubah tanda dari negatif – nol – negatif, dikatakan f mempunyai nilai belok hozontal $f(b)$ pada $x = b$.

Untuk titik C, $f'(x)$ berubah tanda dari negatif – nol – positif, dikatakan f mempunyai nilai balik negatif $f(c)$ pada $x = c$.

<u>Kesimpulan</u> :

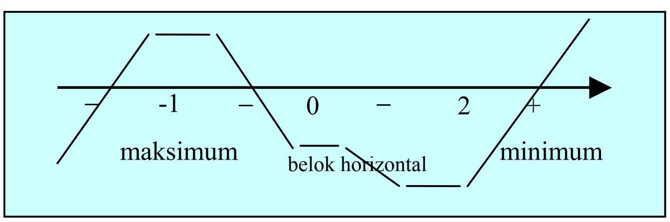
Jika $f'(c) = 0$, maka $f(c)$ disebut nilai stasioner (kritis) dari f pada $x = c$, dan nilai stasioner mungkin berupa nilai balik maksimum, nilai balik minimum atau nilai belok horizontal.

Contoh

Tentukan nilai stasioner fungsi $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ dan tentukan pula macamnya.

Jawab :

$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x + 1)(x - 1)$.



Gb. 2.6

Stasioner dicapai untuk $f'(x) = 0 \Rightarrow 15x^2(x + 1)(x - 1) = 0$

$x = 0$ atau $x = -1$ atau $x = 1$.

Untuk $x = 0 \Rightarrow f(0) = 3.0^5 - 5.0^3 = 0$ maka $f(0) = 0$ adalah nilai belok horizontal.

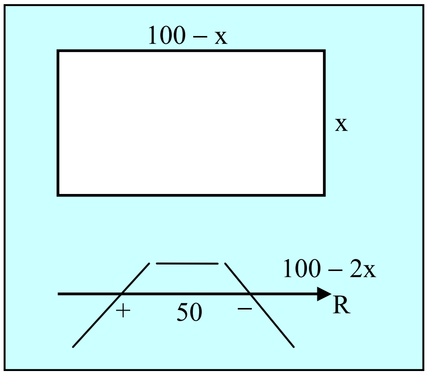
Untuk $x = 1 \Rightarrow f(1) = 3.1^5 - 5.1^3 = -2$ maka $f(1) = -2$ adalah nilai balik minimum.

Untuk $x = -1 \Rightarrow f(-1) = 3.(-1)^5 - 5.(-1)^3 = 2$ maka $f(-1) = 2$ adalah nilai balik maksimum.

Contoh

Dengan menggunakan kawat sepanjang 200 meter akan dibangun suatu kandang ayam yang berbentuk persegipanjang. Tentukan ukuran kandang agar luas kandang ayam tersebut maksimum.

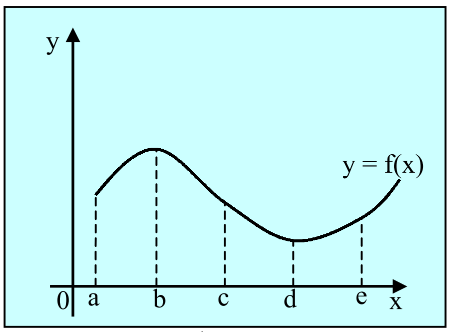
Jawab :



Gb.2.7

Misalkan sisi panjang adalah x dan 100 – x maka luas kandangnya.
$L(x) = x(100 - x) = 100x - x^2$
$L'(x) = 100 - 2x$.
Nilai stasioner dicapai jika $L'(x) = 0$
$\Rightarrow 100 - 2x = 0 \Rightarrow x = 50$.
Jadi agar luas kandang maksimum, ukurannya panjang satu sisi 50 m sedang sisi satunya (100 – 50) meter = 50 meter. Sehingga bentuk kandangnya persegi.

J. Penentuan Maksimum dan Minimum Dengan Menggunakan Turunan Kedua



Gb.2.8

Misalkan kurva y = f(x) seperti pada gambar disamping, dikatakan kurva y = f(x) terbuka ke bawah untuk a < x < c dan kurva y = f(x) terbuka ke atas untuk c < x < e.
Untuk kurva yang terbuka ke atas, pada setiap titiknya nilai f′(x) atau gradien garis singgungnya bertanda sama dan naik atau berubah tanda dari negatif ke positif.

Hal ini menunjukkan bahwa fungsi turunan pertama f′(x) adalah fungsi yang naik, yang berarti $f''(x) > 0$. Sedangkan untuk kurva yang terbuka ke bawah, pada setiap titiknya nilai f′(x) atau gradien garis singgungnya bertanda sama dan turun atau berubah tanda dari positif ke negatif. Hal ini menunjukkan bahwa fungsi turunan pertama f′(x) adalah fungsi yang turun, yang berarti $f''(x) < 0$. Dari kecembungan atau kecekungan kurva di atas dapat ditarik kesimpulan.

Jika f(a) adalah nilai stasioner maka (i) f(a) adalah nilai balik maksimum bila $f'(a) = 0$ dan $f''(a) < 0$ (ii) f(a) adalah nilai balik minimum bila $f'(a) = 0$ dan $f''(a) > 0$.

Contoh
Tentukan nilai maksimum dan minimum dari $f(x) = x(12 - 2x)^2$ dengan metoda derivatif kedua.
Jawab :
$f(x) = x(12 - 2x)^2 = ux^3 - 48x^2 + 144x$
$f(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x - 2)(x - 6)$
$f(x) = 24x - 96 = 24(x - 4)$.
Stasioner jika $f'(x) = 0$
$\Rightarrow 12(x - 2)(x - 6) = 0$
$\Rightarrow x = 2$ atau $x = 6$

Untuk x = 2 maka $f(2) = 2(12 – 22)^2 = 128$ dan $f''(2) = 24(2 – 4) = -48$ (negatif)
Untuk x = 6 maka $f(6) = 6(12 – 2.6)^2 = 0$
$f''(6) = 24(6 – 4) = 48$ (positif).
Jadi f(2) = 128 adalah nilai balik maksimum untuk x = 2 dan
f(6) = 0 adalah nilai balik minimum untuk x = 6.

Latihan 4

1. Tentukan interval dimana fungsi-fungsi di bawah ini naik ataukah turun.
   a. $f(x) = x^2 – 4x + 6$
   b. $f(x) = x^3$
   c. $f(x) = 12x – x^3$
   d. $f(x) = x(x + 2)^2$
   e. $f(x0 = 1 + 2x – 2x^2 – 2x^3$

2. Tentukan nilai stasioner dan jenisnya dari fungsi-fungsi di bawah ini
   a. $f(x) = 9 – x^2$
   b. $f(x) = x(x + 2)^2$
   c. $f(x) = x + \dfrac{9}{x^2}$
   d. $f(x) = -x^4 + 2x^2$
   e. $f(x) = \cos x + 7$

3. Jumlah dua buah bilangan adalah 30. Tentukan masing-masing bilangan tersebut agar hasil kalinya maksimum.

4. Dengan mengambil tembok sebagai salah satu sisi, akan dibuat kandang ayam berbentuk persegipanjang dari pagar kawat sepanjang 30 m. tentukan ukuran kandang agar luas kandang maksimal.

5. Suatu bak penampung air yang direncanakan dibuat dari pelat aluminium yang cukup tebal yang harus menampung 64 dm^3. Tentukan ukuran tabung agar luas seluruh permukaannya minimum, jika
   a. tabung itu tanpa tutup
   b. tabung itu dengan tutup.

6. Diketahui parabol $y = 5 - \frac{1}{2}x^2$, $y \geq 0$. Suatu titik P(x, y) terletak pada parabol tersebut. Tentukan jarak OP terpendek jika O pangkal koordinat.

7. Suatu kotak tanpa tutup yang alasnya berbentuk persegi, jumlah luas kelima sisinya 432 dm^2.
   Tentukan ukuran kotak tersebut agar volumnya maksimum.

8. Diketahui kurva dengan persamaan y = $\sqrt{x}$. Tentukan jarak terpendek titik A(3, 0) ke kurva tersebut.

9. Suatu persegipanjang mempunyai luas 900 cm^2. Tentukan ukuran persegipanjang agar kelilingnya minimum.

10. Suatu proyek direncanakan selesai dalam x hari yang akan menelan biaya

    $(3x + \frac{1200}{x} - 60)$ ribu rupiah. Berapa harikah proyek tersebut harus selesai, agar biaya minimum?

K. Penerapan Diferensial dalam Bidang Ekonomi

Banyak masalah-masalah hubungan perekonomian merupakan hubungan fungsi, oleh karena itu pendiferensialan fungsi juga banyak diterapkan dalam bidang perekonomian.

Berikut adalah beberapa penggunaan diferensial dalam bidang perekonomian yang bersifat sederhana.

1. Elastisitas Permintaan.

Seperti diketahui di dalam hukum permintaan bahwa naik/turunnya harga mempengaruhi naik/turunnya permintaan.

Jika harga suatu barang berubah, maka permintaan akan barang tersebut juga berubah.

Yang dimaksud dengan **elastisitas permintaan** suatu barang terhadap harga adalah **rasio** antara perubahan relatif barang yang diminta terhadap perubahan relatif harga barang tersebut.

Misalnya harga suat barang turun a% dan mengakibatkan naiknya permintaan b%, maka elastisitas permintaan akan barang tersebut adalah = $\frac{b\%}{a\%}$.

Secara matematis :

Jika fungsi permintaan adalah $Q_D = f(P)$ maka

$$e_D = \frac{E_{Q_D}}{E_P} = \lim_{\Delta P \to 0} \frac{\left[\frac{\Delta Q_D}{Q_D}\right]}{\left[\frac{\Delta P}{P}\right]} = \frac{dQ_D}{dP} \cdot \frac{P}{Q_D}$$

di mana : e_D = elastisitas permintaan

E_{Q_D} = persentase perubahan permintaan

E_P = persentase perubahan harga.

Secara umum :

Elastisitas fungsi y = f(x) adalah $e = \frac{Ey}{Ex}$ di mana :

$$\boxed{e = \frac{Ey}{Ex} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{\Delta y}{y}\right)}{\left[\frac{\Delta x}{x}\right]} = \frac{dy}{dx}.\frac{x}{y}}$$

Contoh

Fungsi permintaan akan suatu barang adalah : $Q_D = 40 - 2p^2$

Hitunglah elastisitas barang pada tingka harga P = 5

Jawab :

$$Q_D = 40 - 2P^2$$

$$Q'_D = -4P$$

$$Q_D = \frac{dQ_D}{dP}.\frac{P}{Q_D} = -4P.\frac{P}{40 - 2P^2}$$

Elastisitas permintaan pada tingkat harga : P = 5 adalah :

$$e_D = -4.5.\frac{5}{40 - 2.5^2} = 10$$

Dengan cara yang sama kita dapat menentukan elastisitas penawaran dan elastisitas produkai dengan menggunakan rumus :

Jika **fungsi penawaran** : $Q_S = f(P)$

maka $$\boxed{e_S = \frac{\%\Delta Q_S}{\%\Delta P} = \frac{E_{Q_S}}{E_P} = \lim_{\Delta P \to 0} .\frac{\left(\frac{\Delta Q_s}{Q_S}\right)}{\left(\frac{\Delta P}{P}\right)} = \frac{dQ_S}{dP}.\frac{P}{Q_S}}$$

Jika **fungsi produksi :** P = f(x), P = out put dan x = input maka :

$$e_P = \frac{\%\Delta Q_P}{\%\Delta P} = \frac{E_P}{E_x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\frac{\Delta P}{P}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)} = \frac{dP}{dx} \cdot \frac{x}{P}$$

$$\boxed{e_P = \frac{dP}{dx} . \frac{x}{P}}$$

Contoh

Fungsi produksi suatu komoditi adalah $P = 2x - 3x^2$

Hitunglah elastisitas produksinya pada tingkat penggunaan input sebanyak 4 unit dan 9 unit.

Jawab :

$P = 2x - 3x^2 \Rightarrow P' = 2 - 6x$

$$e_P = \frac{dP}{dx} . \frac{x}{P} = (2 - 6x) . \frac{x}{2x - 3x^2}$$

Pada x = 4 $\longrightarrow$ $e_P = (2 - 6.4) . \frac{4}{2.4 - 3.4^2}$

$$e_P = -22 . \frac{4}{-40} = 2{,}2$$

Pada x = 9 $\longrightarrow$ $e_P = (2 - 6.9) . \frac{6}{(2.6 - 3.6^2)}$

$$= -52 . \frac{6}{-96} = 3{,}25$$

2. Analisis Marginal

Dalam ekonomi istilah marginal adalah istilah yang digunakan pada laju perubahan atau turunan fungsi.

Jika C(x) = biaya total untuk memproduksi x unit suatu produk.

R(x) = pendapatan total dari penjualan x unit produk

P(x) = keuntungan total yang diperoleh dari penjualan x unit produk.

Dari sini kita dapatkan hubungan :

$$\boxed{P(x) = R(x) - C(x)}$$

sehingga :

$$P'(x) = R'(x) - C'(x)$$

$P'(x)$, $R'(x)$ dan $C'(x)$ berturut-turut menunjukkan laju perubahan dari keuntungan, pendapatan dan biaya dari produksi dan penjualan x unit produksi. Dalam istilah ekonomi :

$P'(x)$ = disebut **keuntungan marginal**.

(suatu keuntungan tambahan berkenaan dengan tambahan satu unit output)

$R'(x\ )$ = disebut **penerimaan marginal**

(keuntungan tambahan berkenaan satu unit berkenaan dengan adanya satu unit tambahan output yang diproduksi atau dijual)

$C'(x)$ = disebut **biaya marginal**

(biaya tambahan yang dikeluarkan untuk menghasilkan satu unit out put)

Catatan :

Jika biaya total c = f(x), maka biaya marginal $c' = MC = f''(x)$, dan rata-rata

$$c' = MC = f'(x) \text{ dan biaya rata-rata (ACD)} = \frac{C}{X}$$

Contoh 1

Jika diketahui bahwa fungsi biaya total untuk memproduksi suatu barang komoditi adalah $c = 4 + 2x + x^2$

Tentukan :

a. Biaya marginal

b. Biaya rata-rata, dan biaya rata-rata marginal.

Jawab :

a. $C = 4 + 2x + x^2$

$C' = 2 + 2x$

b. Biaya rata-rata (AC) = $\frac{C}{x} = \dfrac{4 + 2x + x^2}{x} = \frac{4}{x} + 2 + x$

$$AC = \frac{4}{x} + 2 + x$$

$$AC' = -\frac{4}{x^2} + 1$$

Contoh 2

Suatu perusahaan pharmasi memproduksi suatu jenis obat dengan harga Rp 200,00 per unit. Jika biaya totalnya adalah :

$$C(x) = 5000.000 + 80x + 0,003x^2$$

dan kapasitas produksi adalah 30.000 unit, berapakah unit produk yang harus dijual agar mendapatkan keuntungan yang sebesar-besarnya?

Jawab :

Banyaknya produk yang terjual misalnya x buah, maka R(x) = 200x.

Keuntungan $P(x) = R(x) - C(x) = 200x - (5000.000 + 80x + 0,003x^2)$.

Karena kapasitas produksi adalah 30.000, maka interval x : (0, 30.000).

$$\frac{dP}{dx} = 200 - (80 + 0,006x) = 120 - 0,006x$$

Keuntungan maksimum diperoleh untuk $\frac{dP}{dx} = 0$,

$$120 - 0,006x = 0 \Rightarrow x = 20.000$$

x	0	20.000	30.000
P(x)	-500.000	700.000	400.000

$\therefore$ Keuntungan maksimum diperoleh ketika barang produksinya terjual 20.000 unit.

Latihan 4

1. Fungsi biaya total sebuah perusahaan elektronik adalah $C(x) = 0,04x^3 - 0,3x^2 + 2x + 1$ dan fungsi permintaannya : D = 3,5 - 0,5x. Berapakah harga dan kwantitas barang sehingga memberikan laba maksimum ?
2. Diketahui fungsi permintaan D= 4 - 3x dan biaya rata-rata AC = 5. Tentukan keuntungan maksimum yang diperoleh perusahaan tersebut !
3. Diketahui fungsi permitaan D = 6 - 3x dan fungsi biaya total : $C(x) = x^2 + 3x + 4$ Berapa jumlah barang yang harus dijual dan harga perunit barang agar diperoleh laba yang maksimum dan gambarlah grafiknya.
4. Fungsi biaya total $C(x) = 2x^2 - 5x + 3$. Tentukan biaya marginal ketika x = 10; x = 400; x = 100 .

5. Jika fungsi permintaan D = 5 - $2x^2$, carilah elastisitas permintaan terhadap harga jika barang yang diterima adalah 10 unit; 5 unit; 2 unit.
6. Fungsi penjualan terhadap suatu produk industri adalah R = 400x - x^2 dan fungsi biaya totalnya C = 1200 + 200x - $2x^2 + x^3$. Tentukan besarnya hasil penjualan, biaya marginal dan jumlah barang yang terjual ketika laba maksimum.
7. Bila C(x) dola adalah biaya total memproduksi x pelindung kertas dan

   $C(x) = 200 + \frac{50}{x} + \frac{x^2}{5}$ Tentukan :

   a. tentukan fungsi biaya marginal.
   b. fungsi marginal untuk x = 10
   c. biaya sebenarnya memproduksi pelindung kertas yang ke sebelas.
8. Bila C(x) dolar menyatakan biaya total memproduksi x satuan barang dan C(x) = $3x^2 - 6x + 4$. Tentukan :.
   a. fungsi biaya rata-rata.
   b. fungsi biaya marginal.
   c. tentukan minimum mutlaknya biaya rata-rata.
9. Fungsi biaya total C diberikan oleh C(x) = $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x + 2$. Tentukan :
   a. jelajah C
   b. fungsi biaya marginal
   c. selang di mana biaya turun dan di mana naik.
10. Bila R(x) menyatakan pendapatan total yang diterima dari penjualan x buah televisi dan R(x) = $600x - \frac{1}{20}x^3$. Tentukan :
    a. fungsi pendapatan marginal
    b. pendapatan marginal untuk x = 20
    c. pendapatan sebenarnya dari penjualan televisi ke duapuluh satu.